

奇妙的几何世界

——给小朋友的几何笔记

讲义日期：2025 年 11 月 19 日

欢迎来到几何世界！

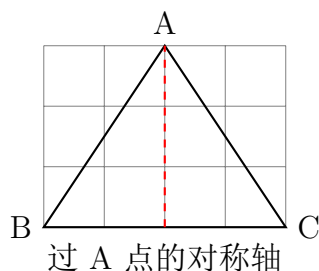
几何学是研究形状、大小和位置的数学。它就像一场图形探险游戏！在这份笔记里，我们会学习一些非常有趣的概念。

今天的主角们

2.1 对称：图形的镜子游戏

想象一下，有些图形就像蝴蝶的翅膀，左右两边是一模一样的。这就是**对称**！

- 三角形 ABC 中，我们用 S_1, S_2, S_3 这样的符号来表示关于过某一个位置（比如位置 1：最上面的角）的对称轴做”对称操作”。
- 什么是对称操作？就像你照镜子，镜子里的你就是你的”对称操作”结果。
- 一个有趣的规则： $S_1^2 = 1$ 。这意味着关于同一个对称轴做两次相同的对称操作，图形就会变回原来的样子！就像你转两次身，又面朝前方了。这也是为什么 $(-1) \times (-1) = 1$ 。



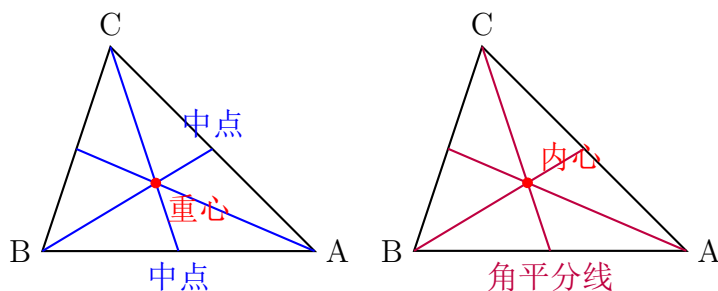
2.2 对称轴：图形的”对折线”

- 问题：一个图形有几条对称轴？
- 解释：对称轴就像一条”魔法对折线”，沿着这条线把图形对折，两边能完全重合。
- 举例：
 - 等腰三角形有 1 条对称轴。
 - 等边三角形有 3 条对称轴。
 - 正方形有 4 条对称轴。

2.3 重要的点和线

在三角形这个大家庭里，有几个非常重要的”家庭成员”：

- 顶点：就是图形的角尖尖，比如三角形的点 A、点 B、点 C。
- 中线：从一个顶点连接到它对边中点的线。
 - 神奇的是，一个三角形的三条中线总会相交于同一个点！这个点叫做**重心**。你可以把它想象成三角形的”平衡点”。
- 角平分线：把一个角平均分成两个一样大小的小角的线。
 - 同样神奇！三角形的三条角平分线也总会相交于同一个点！这个点叫做**内心**，它是三角形内切圆的圆心。

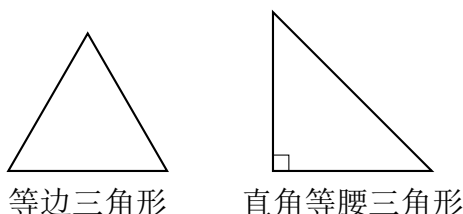


2.4 认识角度

角度是衡量角的大小的单位，符号是 $^{\circ}$ 。

- 锐角三角形：三个角都是锐角 ($< 90^{\circ}$) 的三角形。

- 等边三角形的三个角都是 60° ，因此是锐角三角形。
- 等腰直角三角形的三个角分别是 $90^\circ, 45^\circ, 45^\circ$ 。
- 因为内角必然相同，所有等边三角形都相似，所有等腰直角三角形也必然相似。注意，相似是说形状一样，但大小不一定一样。如果两个平面/立体图形形状相同，大小相同，完全可以重合，我们称为全等。



2.5 角度与正多边形

一个圆代表了一个周角，即 360° 。因此，

- 120° 可以三等分一个圆，构造正三角形。
- 90° 可以四等分一个圆，构造正方形。
- 60° 可以六等分一个圆，构造正六边形。
- 45° 可以八等分一个圆，构造正八边形。
- 通过等分 360° ，我们可以等分圆，从而构造任意正多边形。但是正多面体只有有限的五个：正四面体、正六面体（正方形），正八面体、正十二面体和正二十面体。

2.6 对称操作：简单的群论概念

- 对称操作就像给图形做”魔法动作”，做完后图形看起来还是一样的
- 等边三角形有 6 种对称操作：恒元 1(不变)，3 种镜面反射 (S_1, S_2, S_3)，两种旋转：逆时针 120° 和顺时针 120° 。这个 6 阶群记作 $D_3 \cong S_3$ 。这不是一个交换群。（事实上，这是最小的非交换群！）
- 这些对称操作组成一个”对称群”。
- 正方形有 8 种对称操作：4 种旋转（含恒元，即旋转 0° ），4 种反射。这个 8 阶群记作 D_4 ，是 S_4 的子群。

总结与回顾

- **对称**：图形通过某种操作（如反射）保持不变的性质。
- **对称轴**：图形可以沿着它对折并完全重合的直线。
- **顶点**：图形的角上的点。
- **中线**：顶点到对边中点的连线，三线交于**重心**。
- **角平分线**：平分一个角的线，三线交于**内心**。
- **角度**：角的大小，有锐角、直角、钝角。
- **正多边形**：通过等分圆可以构造各种正多边形。
- **对称操作**：让图形保持不变的变换，组成对称群。

几何学是不是很有趣？多观察身边的物体，比如窗户、书本、树叶，找找它们的对称轴和不同的角吧！